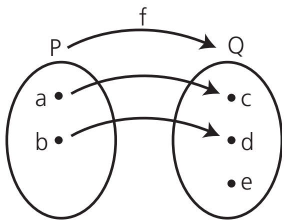
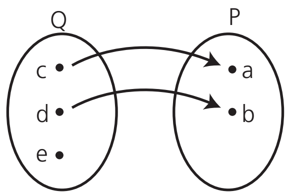
Matemática II
Aula 15: Função Inversa
Exercícios Propostos

01. 1º Seja f: P → Q uma função injetora:

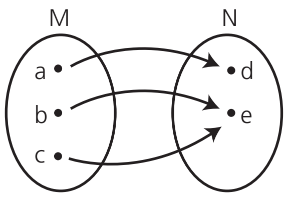


Ao tentarmos descobrir $\mathbf{f^{-1}}$, temos:

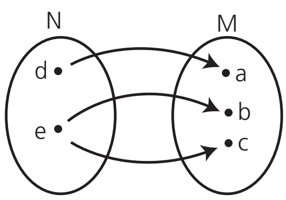


Portanto, como o elemento **e** ficou "sobrando", não se pode inverter a função **f**.

2º Seja g: M → N uma função sobrejetora:

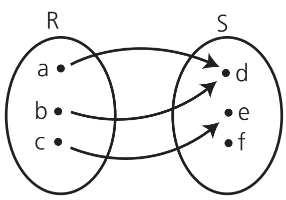


Ao tentarmos descobrir $\mathbf{g^{-1}}$, temos:

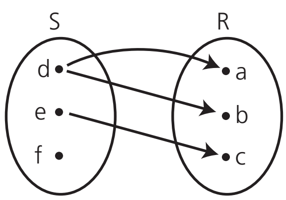


Como o elemento **e** ficou com duas imagens, temos que não se pode inverter a função **g**.

3º Seja h: R → S uma função não injetora e não sobrejetora:

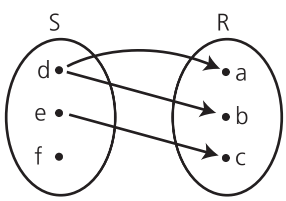


Ao tentarmos descobrir $\mathbf{h^{-1}}$, temos:

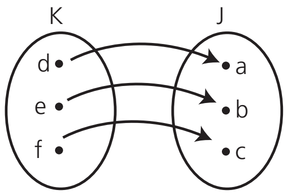


Note que o elemento **d** ficou com 2 imagens e o elemento **f** está "sobrando", então, concluímos que não se pode inverter a função **h**.

4º Seja t: J → K uma função bijetora:



Ao tentarmos descobrir $\mathbf{t^{-1}}$, temos:



Verifique: A função t^{-1} existe e é a inversa da função **t**.

Resposta: D

02.

$$f(\underbrace{x+3}_{t}) = 2x - 1 \Rightarrow f(t) = 2(t-3) - 1$$

$$t = x + 3 \rightarrow \boxed{x = t - 3} \quad \boxed{f(t) = 2t - 7}$$

Assim: $f(x) = y = 2x - 7$
1º passo: $x \rightleftharpoons y$
$x = 2y - 7$
2º passo: isolar **y**

$$x = 2y - 7 \rightarrow x + 7 = 2y \rightarrow \frac{x+7}{2} = y \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}}$$

Resposta: A

03. $C = \frac{5}{9}(F - 32) \rightarrow \frac{9C}{5} = F - 32 \rightarrow F = \frac{9C}{5} + 32 \rightarrow \boxed{F = \frac{9C + 160}{5}}$

Resposta: C

04. Como $\mathbf{f^{-1}}$ é inversa de **f**, temos que:

$$\begin{cases} f^{-1}(f(2)) = 2 \quad \text{e} \\ f(f^{-1}(2)) = 2 \quad \text{logo:} \end{cases}$$

$$\left[f^{-1}(f(2))\right]^2 + \left[f\left(f^{-1}(2)\right)\right]^3 = 2^2 + 2^3 = \boxed{12}$$

Resposta: C

05. I. (V) $g(x) = -2x^2 + 5x - 4$
$g(f(x)) = -2[f(x)]^2 + 5[f(x)] - 4$
$g(f(x)) = -2[2x - 3]^2 + 5[2x - 3] - 4$
$g(f(x)) = -2(4x^2 - 12x + 9) + 10x - 15 - 4$
$g(f(x)) = -8x^2 + 34x - 37 = -(8x^2 - 34x + 37)$

II. (F) $g(-1/2) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) - 4$

$g(-1/2) = -7$
$f(g(-1/2)) = f(-7) = -17$

III. (V) Na função **f**, tem-se: $y = 2x - 3$
Logo, na sua inversa (f^{-1}), tem-se: $x = 2y - 3 \rightarrow x + 3 = 2y \rightarrow y = \frac{x+3}{2}$

Resposta: D

06. Somente as funções bijetoras são inversíveis, ou seja, admitem função inversa.
Ora, a função $f(x) = x^2$, definida em $\mathbb{R}$ – conjunto dos números reais – não é injetora, pois elementos distintos possuem a mesma imagem. Por exemplo, $f(3) = f(-3) = 9$. Por esse motivo, a função não é bijetora e, em consequência, não é inversível.
Observe também que a função dada não é sobrejetora, pois o conjunto imagem da função $f(x) = x^2$ é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais não negativos, o qual não coincide com o contradomínio dado, que é igual a $\mathbb{R}$.

Resposta: C

07. $y = \dfrac{3x+2}{4x-1}$

1º passo: trocar **x** por **y** e vice-versa

$x = \dfrac{3y+2}{4y-1}$

2º passo: isolar **y**

$$4xy - x = 3y + 2 \rightarrow 4xy - 3y = x + 2 \rightarrow y(4x - 3) = x + 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{4x-3} \rightarrow \left.\begin{array}{r} f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{4x-3} \\ \text{com } x \neq \dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \text{Logo} \begin{cases} a = 4 \\ \text{e} \\ b = -3 \end{cases}$$

Resposta: D

08. Se f: $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow \left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right[$

$f(x) = x^2 - x + 1$

Então $f^{-1}(x)$ é tal que f^{-1}: $\left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right[\rightarrow \underbrace{\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[}$

No que a imagem está contida no contradomínio, logo será positiva! ①

1º passo: trocar **x** por **y**

$x = y^2 - y + 1$

2º passo: isolar **y**

$$y^2 - y = x - 1 \rightarrow y^2 - y \boxed{+\frac{1}{4}} = x - 1 \boxed{+\frac{1}{4}} \rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x - \frac{3}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|y - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x - \frac{3}{4}} \begin{cases} y - \dfrac{1}{2} = -\sqrt{x - \dfrac{3}{4}} \left.\right\} \text{Não convém devido a ①} \\ y - \dfrac{1}{2} = \sqrt{x - \dfrac{3}{4}} \end{cases}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}}$$

Resposta: C

09. Pelo gráfico de y = f(x), temos:

$f(1) = 2 \rightarrow f^{-1}(2) = 1$

Assim, $g(f^{1}(2)) = g(1) = 3$, pelo gráfico de y = g(x).

Daí, $f(g(f^{1}(2))) = f(g(1)) = f(3) = 4$, gráfico de y = f(x).

$f(g(f^{1}(2))) = 4$

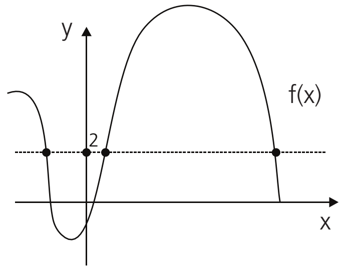
Resposta: D

10. Chamando $V = g(f(x))$: $V^2 + V - 2 = 0 \rightarrow V = -2$ ou $V = 1$

Como $g: [-2,5] \rightarrow (0,\infty)$, $g(x) > 0$

Daí: $g(f(x)) = 1 \xrightarrow[\text{questão}]{\text{dado da}} f(x) = 2$

Pelo gráfico de f(x), vemos que há 3 números que fazem f(x) = 2.



Resposta: E