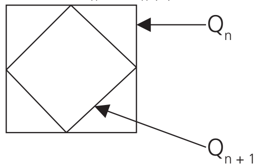
MATEMÁTICA I

AULA 20:

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA I

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Considerando dois quadrados consecutivos da sequência, Q_n e Q_{n+1}, cujos lados medem L_n e L_{n+1}, respectivamente, temos:



$$\frac{\text{Área de } Q_{n+1}}{\text{Área de } Q_n} = 2 \text{ (razão da PG)} \rightarrow \frac{(L_{n+1})^2}{(L_n)^2} = 2 \rightarrow \frac{L_{n+1}}{L_n} = \sqrt{2} \rightarrow L_{n+1} = \sqrt{2} \cdot L_n$$

Assim, as medidas dos lados formam uma P.G. de razão $\sqrt{2}$.

Resposta: D

02. Sendo p% a valorização anual e sendo a_n o valor do apartamento no ano **n**, o valor no ano seguinte será:
$a_{n+1} = [100\% + p\%] \cdot a_n \rightarrow a_{n+1} = q \cdot a_n$, onde q = [100% + p%] é constante.

Logo, $a_0 = 100$, $a_1 = x + 30$ e $a_2 = 2x - 39$ formam uma P.G. de razão **q**.
Daí,

Razão da P.G. = $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{a_2}{a_1}$

Assim:
$$\frac{x+30}{100} = \frac{2x-39}{x+30}$$
$(x + 30)^2 = (2x - 39) \times 100$
$x^2 + 60x + 900 = 200x - 3900$
$x^2 + 60x - 200x + 900 + 3900 = 0$
$x^2 - 140x + 4800 = 0$
$x = \dfrac{140 \pm 20}{2}$
Logo, x = 80 ou x = 60

Admitindo x = 60, teremos:
Ano 0 → 100
Ano 1 → 30 + 60 = 90
Ano 3 → 2(30) – 39 = 21
ou seja, x = 60, não serve, pois acontece uma desvalorização do imóvel.

Para x = 80:
Ano 0 → 100
Ano 1 → 80 + 30 = 110
Ano 2 → 2(30) – 39 = 121
Assim, há uma valorização percentual do apartamento e o valor final será de 121 milhares de reais.

Resposta: A

03. Sendo **q** a razão da P.G. de números inteiros (de 1 a 60) e a_1 o menor termo dessa P.G., o sexto e maior termo será:
$a_6 = a_1 \cdot q^5$
Observando que a razão deve ser inteira positiva e diferente de 1, podemos ter:
I) se q = 2, então $q^5 = 32 \Rightarrow a_1 = 1$, obrigatoriamente.
II) se $q \geq 3$, então $q^5 > 60$ (não convém)
Assim, a única P.G. possível é (1, 2, 4, 8, 16, 32)
Portanto, com certeza esta pessoa apostou no número 1.

Resposta: A

04. Cada quadrado preto de uma determinada etapa é dividido em 9 quadrados iguais e desses 9 quadrados, 5 ficam na etapa seguinte. Assim, o número de quadrados pretos de uma etapa, a partir da segunda, é igual a $\frac{5}{9}$ do número de quadrados pretos da etapa anterior. Sendo a_n o número de quadrados pretos da etapa **n**, devemos ter a P.G. de razão $q = \frac{5}{9}$ e $a_1 = 1$:

$$\left(1, \frac{5}{9}, \left(\frac{5}{9}\right)^2, \left(\frac{5}{9}\right)^3, \left(\frac{5}{9}\right)^4, \ldots\right)$$

Logo, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$

Portanto, o quinto termo é: $a_5 = \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{625}{6561}$.

Resposta: E

05.

i) Razão da PG = q = $\frac{1600}{2000} = \frac{1280}{1600} \to q = \frac{4}{5}$

ii) $a_{2006} = a_{1997} \cdot q^{2006-1997} \to a_{2006} = 2000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9$

iii) $\log_{10}^2 = 0{,}3 \to 2 = 10^{0,3}$

Daí, temos:

$$a_{2006} = 2000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \to a_{2006} = 2000 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^9 \to a_{2006} = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{(2^3)^9}{10^9} \to$$

$$a_{2006} = 2 \cdot \frac{(10^{0,3})^3)^9}{10^6} \to a_{2006} = 2 \cdot \frac{10^{8,1}}{10^6} \to a_{2006} = 2 \cdot 10^{2,1} \approx 2 \cdot 10^2 = 200$$

Resposta: C

06.

i) Observando que 4h = $4 \cdot 60$ min = 240 min, para o tempo, em minutos, temos a PA (0, 20, 40, 60, ..., 240) de razão r = 20, na qual temos:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \to 240 = 0 + (n-1) \cdot 20 \to n = 13$

ii) Para o número de bactérias temos a P.G. (100, 200, 400, …, b_n) de razão $q = \frac{200}{100} = 2$, na qual, temos:
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \to b_n = 100 \cdot (2)^{n-1}$
Daí, $b_{13} = 100 \cdot (2)^{12} = 100 \cdot (4096) = 409\,600$

Resposta: C

07. Sendo d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 as respectivas distâncias heliocêntricas de Vênus, Terra, Marte, Cinturão de asteroides e Júpiter (veja essa sequência na figura), temos pelo enunciado a P.G. de razão q = 2 (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), tal que:

i) $a_1 = 0{,}3$
ii) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \to a_n = 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$
iii) $d_n - 0{,}4 = a_n$

Assim, para a distância heliocêntrica de Júpiter (d_5) teremos:
$d_5 - 0{,}4 = a_5$
$d_5 - 0{,}4 = 0{,}3 \cdot 2^4$
$d_5 = 4{,}8 + 0{,}4$
$d_5 = 5{,}2$

Resposta: B

08.

i) Quantidade de lados: (4, 4^2, 4^3, …, 4^n, 4^{n+1}, …).
(Note que cada lado de um polígono se transforma em 4 lados no polígono seguinte.)

ii) Sendo 3s a medida do lado do n-ésimo, a medida do lado do polígono seguinte será **s**.

Assim, o n-ésimo polígono tem perímetro Pn = $4n \cdot (3s)$, enquanto o próximo polígono tem perímetro $P_{n+1} = 4_{n+1} \cdot (s)$. Daí:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{4^{n+1} \cdot (s)}{4^n \cdot (3s)} \to P_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot P_n$$

Assim, os perímetros (P_1, P_2, ..., P_n, ...) formam uma P.G. de razão $q = \frac{4}{3}$ e primeiro termo $P_1 = 4 \cdot 1 = 4$ metros, na qual se tem:

$$P_n = P_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \to P_n = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \text{ para } n \geq 1.$$

Portanto, $P_5 = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^5}{3^4}$

Resposta: C

09. Admitindo que a_n seja o valor do quadro no ano **n**, temos $a_{2013} = 84 \cdot 10^6$ e $a_{1953} = 84$. Daí:

I) $a_{2013} = a_{1953}.q^{60} \Rightarrow 84 \cdot 10^6 = 84 \cdot q^{60} \Rightarrow q^{60} = 10^6 \Rightarrow \sqrt[3]{q^{60}} = \sqrt[3]{10^6} \Rightarrow q^{20} = 10^2$.

II) $a_{2033} = a_{2013} \cdot q^{20} = 84 \cdot 10^6 \cdot 10^2 = 8,4 \cdot 10^9$

Resposta: B

10. Sendo S_n a soma dos números da etapa **n**, temos:
$S_1 = 1 + 1 \to S_1 = 2$
$S_2 = S_1 + 2 \cdot 2 \to S_2 = 6$
$S_3 = S_2 + 4 \cdot 3 \to S_3 = 18$
$S_4 = S_3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \to S_4 = 54$

Nota-se a P.G. (2, 6, 18, 54, ...) de razão q = 3, na qual se tem:
$S_n = S_1 \cdot q^{n-1} \to S_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Daí, $S_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39\ 366$

Resposta: A