Resolução

ANUAL
VOLUME 6

MATEMÁTICA I

AULA 29

NÚMEROS COMPLEXOS (ℂ) – PARTE II

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. Escrevendo Z na forma algébrica, temos:

$Z = (1 + i)(1 - i)^2 =$

$= (1 + i)(1 - i)(1 - i) =$

$= (1^2 - i^2)(1 - i) =$

$= (2)(1 - i) = 2 - 2i$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2} \\ \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Assim, o argumento principal de Z é $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$.

Resposta: D

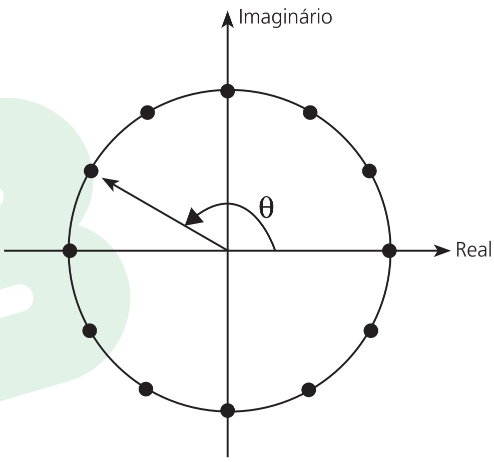
02. Cada arco da circunferência ao lado mede 360° : 12 = 30°. Sendo assim, o número complexo Z procurado tem módulo |Z| = 4 (comprimento do ponteiro) e argumento $\theta = 5 \cdot 30° = 150°$. Daí:

$Z = 4(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°) \Rightarrow$

$\Rightarrow Z = 4 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow Z = -2\sqrt{3} + 2i$

Resposta: A



03. Temos que:

I.

$u = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \cdot \text{sen } 315°)$

$u = 2\sqrt{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$u = 2 - 2i$

Assim, o afixo de **u** é P(2; –2).

II. $w = u^2 \Rightarrow w = (2 - 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 \Rightarrow w = -8i$

Assim, o afixo de **w** é Q(0; –8).

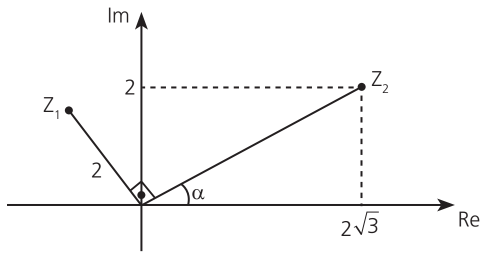
III. A reta que passa perpendicularmente a um segmento, no ponto médio, é a mediatriz do segmento. Como qualquer ponto A(x, y) da mediatriz do segmento PQ fica a igual distância de P e Q (propriedade da mediatriz), devemos ter:

$d_{PA} = d_{QA} \Rightarrow d_{PA}^2 = d_{QA}^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = (x - 0)^2 + (y + 8)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 + 16y + 64 \Rightarrow -4x - 12y - 56 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3y + 14 = 0$

Resposta: C

04.



Temos:

I.

$$Z_1 = 2\sqrt{3} + 2 \cdot i \text{ e } |Z_1| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4.$$

II.

$$\text{tg}\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 30°$$

Assim, $Z_1 = 4 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

III. $|Z_2| = 2$ e o argumento de Z_2 é $\theta = \alpha + 90° = 120°$, ou seja:
$Z_2 = 2 \cdot (\cos 120° + i \cdot \text{sen } 120°)$

IV. No produto de números complexos na forma trigonométrica, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos:
$Z_1 \cdot Z_2 = (4 \cdot 2) \cdot [\cos(30° + 120°) + i \cdot \text{sen}(30° + 120°)]$
$Z_1 \cdot Z_2 = 8 \cdot [\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°]$

Observando que 150° é do segundo quadrante e corresponde ao 30° do primeiro quadrante, temos que $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, obtemos:

$$Z_1 \cdot Z_2 = 8\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$Z_1 \cdot Z_2 = -4 + 4i = a + bi.$

Logo, $a = -4\sqrt{3}$ e $b = 4$, cuja soma é:

$a + b = -4\sqrt{3} + 4$

$a = b = 4 \cdot \left(-\sqrt{3} + 1\right)$

Resposta: A

05.

I.

$$Z = 1 - i\sqrt{3} \rightarrow Z = 2\left[\frac{1}{2} + i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \rightarrow Z = 2 \cdot [\cos 300° + i \text{ sen } 300°], \text{onde, } 300° = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

II. $w = -1 + i$ tem módulo igual a $|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e argumento θ tal que:

$$\begin{cases} \cos \theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$$

Assim, o número complexo $u = \frac{Z}{w}$ terá módulo igual a $|u| = \frac{|Z|}{|w|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ e o seu argumento será $\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{20\pi - 9\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$ rad.

Resposta: E