MATEMÁTICA I
AULA 29
NÚMEROS COMPLEXOS (ℂ) – PARTE II
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Temos que:

$$Z=\frac{2\cdot i}{i^{26}-i^{3}}=\frac{2\cdot i}{i^{2}+i}=\frac{2\cdot i}{-1+i}\Rightarrow Z=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}\Rightarrow Z=\frac{-2i-2i^{2}}{(-1)^{2}-i^{2}}\Rightarrow Z=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

Logo,

$$|Z|=\sqrt{1^{2}+(-1)^{2}}=\sqrt{2}$$

Resposta: B

02. Sendo $Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, temos:

I.

$$|Z|=\sqrt{10^{2}+10^{2}}=\sqrt{2\cdot 10^{2}}\rightarrow |Z|=10\sqrt{2}$$

II.

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{sen}\,\theta=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\rightarrow\ \theta=45^{\circ}=\frac{\pi}{4}\text{Rad}$$

Daí, $Z=10\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

Resposta: E

03. Temos que:

$z = 4 \cdot (\cos 135^{\circ} + i \cdot \text{sen}\ 135^{\circ})$

$$Z=4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$Z=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i.$$

Daí, o conjugado de **z**, será:

$$\bar{Z}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}Z-\bar{Z}&=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i-(-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot i)=\\&=4\sqrt{2}\cdot i\end{aligned}$$

Resposta: D

04.

I. $\text{tg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{b}{a}=1\rightarrow b=a$

II. $Z = a + bi = (a, b)$ pertence à parábola $y = x^2$:

$$y=x^{2}\rightarrow b=a^{2}\rightarrow a=a^{2}\rightarrow a\ \ (1-a)=0\rightarrow\begin{cases}a=0\rightarrow b=0\\ \text{ou}\\ a=1\rightarrow b=1\end{cases}$$

Como **a** e **b** são não nulos, $Z = 1 + 1 \cdot i$.

Resposta: A

05. Temos que:

I.

$$(1+i)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

II.

$$(1+i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i$$

Assim,

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{e}\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Logo,

$$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}(1+i).$$

Resposta: A

06. Temos que:

I. $|Z| = 2$ e argumento de Z igual a 30°, ou seja:
$Z = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

II. $|w| = 4$ e argumento de **w** igual a (270° – 30°) = 240°, ou seja:
$w = 4 \cdot (\cos 240° + i \cdot \text{sen } 240°)$

III.

$$t\cdot Z=w\rightarrow t=\frac{w}{Z}$$

Assim, o tiro certeiro $t = |t| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen }\theta)$ é tal que:

$$|t|=\frac{|w|}{|Z|}=\frac{4}{2}=2\ \text{ e }\ \theta=240°-30°=210°$$

Daí:

$t = 2 \cdot (\cos 210° + i \cdot \text{sen } 210°)$

$$t=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\right)$$
$$t=-\sqrt{3}-i$$

Resposta: D

07. Substituindo $Z = x + yi$ e $z_0 = 10 + 5i$ em $|Z - Z_0| = 30$, obtemos:

$$|(x-10)+(y-5)i|=30\Rightarrow\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=30\Rightarrow(x-10)^2+(y-5)^2=900\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-20x+100+y^2-10y+25-900=0\Rightarrow x^2+y^2-20x-10y-775=0$$

Resposta: A

08. Sendo $Z = x + yi$, onde **x**, **y** são reais, temos:

$Z^2 - |Z|^2 = 0$

$$(x+yi)^2-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=0$$
$$x^2+2xyi-y^2-(x^2+y^2)=0$$

$-2y^2 + 2xyi = 0 + 0i$

Assim:

$-2y^2 = 0$ e $2xy = 0$

$y = 0$ e $2 \cdot x \cdot 0 = 0$

$y = 0$ e $x \in \mathbb{R}$ (**x** pode ser qualquer real)

Logo, $Z = x + 0i = (x, 0)$, isto é Z, pode ser qualquer ponto do eixo **x** (uma reta).

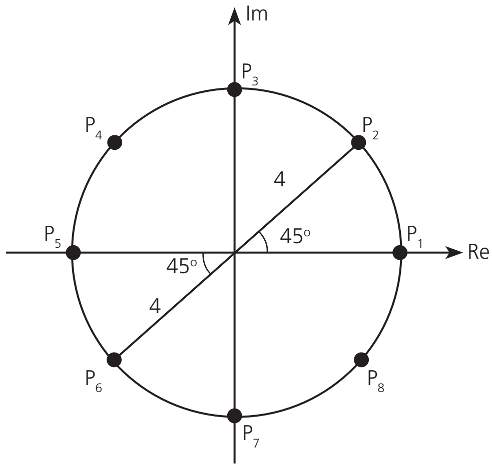
Resposta: C

09. Temos que:

$$|Z| = \frac{|x - yi|}{|x + yi|} = \frac{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1.$$

Resposta: A

10. A circunferência da equação $x^2 + y^2 = 16$, tem centro c(0, 0) e raio igual a 4. Assim, é fácil ver que os vértices do octógono regular inscrito são os pontos P_1, P_2, ..., P_8 seguintes.



Observando que P_2 e P_6 pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos:

I. P_2 tem módulo 4 (raio) e argumento = 45°, ou seja:
$P_2 = 4 \cdot (\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°) \rightarrow P_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$

II. P_6 tem módulo 4 (raio) e argumento 180° + 45° = 225°, ou seja:
$P_6 = 4 \cdot (\cos 225° + i \cdot \text{sen } 225°) \rightarrow P_6 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot i$

III. $P_2 \cdot P_6 = \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i\right) \cdot \left(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot i\right)$
$P_2P_6 = -8 - 8i - 8i - 8i^2$, onde $i^2 = -1$.

Logo:
$P_2P_6 = -16i$

Resposta: B